

博弈论手写笔记完整转写稿

课堂手写笔记整合版

目录

第一部分 第一部分：标准式博弈、纳什均衡与混合策略（第 1–3.6 页）	6
1 博弈论基础：参与人、策略与支付	6
1.1 博弈论的研究对象与基本要素	6
1.2 信息条件：全信息与完全信息	6
1.3 结果分类表与囚徒困境	6
1.4 标准式博弈的表示	7
2 重复剔除严格劣策略	8
2.1 严格劣策略的定义	8
2.2 囚徒困境中的严格支配	8
2.3 三策略例子：逐步剔除	9
3 纳什均衡：定义、反应函数与存在性	10
3.1 纳什均衡的定义	10
3.2 反应函数交点：Cournot 与 Bertrand	10
3.3 存在性说明	10
4 零和博弈、协调博弈与混合策略	12
4.1 简单零和博弈：石头、剪刀、布	12
4.2 协调博弈：性别之战	12
4.3 混合策略的定义	12
4.4 混合策略纳什均衡	13
5 混合策略均衡：无差异原则与均衡关系	14
5.1 无差异原则（支撑集上的最优化）	14
5.2 性别之战的混合策略均衡	14
5.3 纯策略、混合策略与支配关系	15

5.4 零和博弈与一般博弈的区别	15
第二部分 第二部分：完全信息动态博弈与子博弈精炼均衡（第 4, 4.2–4.6, 8 页）	15
6 完全信息动态博弈、子博弈精炼均衡与相关例子	15
6.1 完全信息动态博弈的基本形式	15
6.2 扩展式博弈与有限重复博弈	16
6.3 子博弈精炼纳什均衡（SPNE）的定义	17
6.4 一个进入威胁博弈：NE 与不可置信威胁	17
6.5 子博弈的定义	18
6.6 关于三个 NE 的进一步分析	18
6.7 SPNE 的向后归纳直觉	19
6.8 蜈蚣博弈（Centipede Game）与向后归纳	19
6.9 100 阶段蜈蚣博弈与实验现象	20
6.10 银行挤兑（Bank Run）/ Diamond–Dybvig 型协调博弈	20
6.11 本批笔记小结	21
第三部分 第三部分：无限重复博弈、触发策略与 SPNE（第 5–6.3 页）	21
7 无限重复博弈与触发策略	21
7.1 无限重复博弈的贴现收益	21
7.2 阶段博弈：一个囚徒困境型例子	22
7.3 严厉触发策略（grim trigger strategy）	22
7.4 合作与单次欺骗的收益比较	22
7.5 Folk Theorem 旁注	23
8 Cournot 重复博弈中的触发策略与以牙还牙	24
8.1 Cournot 下的严厉触发策略	24
8.2 胡萝卜–大棒策略（carrot-and-stick）	24
8.3 以牙还牙策略（tit for tat）	24
9 严厉触发策略为何可以构成 SPNE	26
9.1 合作状态下的无偏离条件	26
9.2 偏离历史之后的可信惩罚	26
9.3 两类子博弈与 SPNE 结论	26

10 有限期惩罚：胡萝卜—大棒策略的激励约束	28
10.1 例题设定与策略规则	28
10.2 合作子博弈中的激励约束	28
10.3 惩罚子博弈中的激励约束	29
10.4 惩罚强度与可实施区间	29
10.5 严厉触发与有限期惩罚的比较	29
11 以牙还牙为何未必是 SPNE	30
11.1 以牙还牙的路径性质	30
11.2 与 SPNE 的冲突	30
12 本批笔记小结	30
第四部分 第四部分：进入阻止、限制性定价与贝叶斯博弈（第 7–10 页）	31
13 不可置信的威胁：在位厂商以产量阻止进入	31
13.1 垄断者独占市场时的最优选择	31
13.2 新厂商进入后的利润	31
13.3 以高产量威胁阻止进入	32
13.4 为什么这是不可置信威胁	32
14 进入、退出策略：沉淀成本与承诺	33
14.1 进入阻止问题的背景	33
14.2 例题设定：固定成本与线性需求	33
14.3 在位厂商通过扩产压缩进入利润	34
14.4 阻止进入时在位厂商利润	34
15 限制性定价与信息不对称	35
15.1 在位厂商的成本类型与进入者决策	35
15.2 进入者的信念与进入条件	35
15.3 限制性定价作为信号	36
15.4 可置信的低价与现实例子	36
16 不完全信息静态博弈：贝叶斯博弈	37
16.1 贝叶斯博弈的组成	37
16.2 信念函数	37
16.3 贝叶斯纳什均衡（BNE）	37

目录	4
16.4 均衡含义	38
17 本批笔记小结	38
第五部分 第五部分：贝叶斯古诺、性别之战与拍卖（第 11.0–13 页）	38
18 贝叶斯–古诺问题：竞争者成本类型不确定	38
18.1 完全信息基准	38
18.2 信息不完全：厂商 B 的成本有两种类型	39
18.3 厂商 B 的类型依赖反应函数	39
18.4 厂商 A 的期望利润最大化	39
18.5 原稿留待求解处的利润校验	40
19 性别之战的贝叶斯纳什均衡：私人偏好扰动	41
19.1 完全信息下的性别之战	41
19.2 加入私人类型扰动	41
19.3 截断型策略	41
19.4 Chris 的临界类型条件	42
19.5 Pat 的临界类型条件	42
19.6 对称贝叶斯均衡与极限	43
20 拍卖中的贝叶斯纳什均衡：第一价格密封拍卖	44
20.1 两人第一价格密封拍卖	44
20.2 线性投标策略与中标概率	44
20.3 两人对称均衡出价	44
20.4 推广： n 位竞标者	45
20.5 n 人对称贝叶斯纳什均衡	45
20.6 竞标人数增加的经济含义	46
21 本批笔记小结	46
第六部分 第六部分：第 15 章习题（题 1–题 7）	47
22 题 15.1：猎鹿博弈与多人扩展	47
22.1 两人猎鹿博弈	47
22.1.1 纯策略纳什均衡	47

22.1.2 混合策略均衡	47
22.2 n 人猎鹿博弈	48
23 题 15.3: 参数化协调博弈的混合均衡	48
24 题 15.4: 风险分担与帕累托有效条件	50
25 题 15.6 与题 15.8: 顺序行动与先动优势	51
25.1 题 15.6: 原稿可辨识结论	51
25.2 题 15.8: 静态博弈的纳什均衡	51
25.3 若 A 先行动: 向后归纳	51
25.4 若 B 先行动: 向后归纳	52
26 题 15.10: 垄断定价与另一状态下的利润计算	53
26.1 状态 1 的垄断最优选择	53
26.2 状态 2 的手稿结果	53
27 题 15.11: 需求状态不确定下的贝叶斯古诺竞争	54
27.1 厂商 B 知道状态, 厂商 A 仅知道分布	54
27.2 厂商 B 的状态依赖反应函数	54
27.3 厂商 A 的期望利润	54
28 题 15.12: 第一价格拍卖、第二价格拍卖与收益等价	55
28.1 第一价格拍卖的预期收入	55
28.2 第二价格拍卖中的如实报价	55
28.2.1 高报: $b'_i > V_i$	55
28.2.2 低报: $b'_i < V_i$	56
28.3 第二价格拍卖的预期收入	56
29 本批习题小结	57

第一部分 第一部分：标准式博弈、纳什均衡与混合策略（第 1–3.6 页）

1 博弈论基础：参与人、策略与支付

1.1 博弈论的研究对象与基本要素

手稿标题为：

博弈论（Game Theory）ABC.

手稿开头写有：博弈论讨论多人之间的策略互动，其主要要素包括：

- (1) 局中人（参与人、players）；
- (2) 策略：参与人在每个局面中的行动选择；
- (3) 支付（报酬，payoff）。

1.2 信息条件：全信息与完全信息

手稿左侧有框注“全信息”，并写有英文旁注“holding constant”。该处文字较轻，可忠实保留为：

全信息：在所有[原稿不清：机遇/情形]时，每对[原稿不清：策略或结果]总能比较，一个具有相同的一组定义。*holding constant*。

手稿右侧写有“完全信息”，正文可识别为：

完全信息：每个参与人的所有有关[原稿不清：行动/可能行动]、策略和支付收益都有正确的认识，知道全部信息。

为避免将原稿中的“全信息/完全信息”直接改写成标准教材中的不同术语，本稿暂按手稿原词保留。后续总审校时可根据课堂教材统一为“完美信息”“完全信息”或“完备信息”。

1.3 结果分类表与囚徒困境

原稿中部有一张以“完全/不完全”和“静/动”为标题的结果分类表，文字如下：

	完全	不完全
静	安静	不安静
动	晃动	不晃动

(1)

其中“晃动/不晃动”字迹可能为[原稿不清：晃动/震动/移动]，位置保留待复核。

手稿随后给出“囚徒困境”支付矩阵。令两名囚徒均可选择“不招”或“招”，矩阵为：

	囚徒 B：不招	囚徒 B：招
囚徒 A：不招	$(-1, -1)$	$(-9, 0)$
囚徒 A：招	$(0, -9)$	$(-6, -6)$

(2)

在这个矩阵中，若以较大的收益值为更优结果，则无论对方是否招供，个体都具有选择“招”的激励；但双方都“招”的结果 $(-6, -6)$ 又劣于双方都“不招”的结果 $(-1, -1)$ 。这正是囚徒困境中个体理性与集体理性之间的冲突。

1.4 标准式博弈的表示

手稿底部定义为：

在一个 n 人博弈的标准式表达中，参与者的策略空间为 $S_1, \dots, S_n$ ，收益函数为 $u_1, \dots, u_n$ ，本例用

$$G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$$

表示此博弈。

因此，一个标准式博弈可写为：

$$G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}, \quad (3)$$

其中：

- S_i 是参与人 i 的策略集合；
- $u_i : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$ 是参与人 i 的收益函数。

原稿页末另记有：[原稿不清：张维迎，基本分析/基本博弈]。

2 重复剔除严格劣策略

2.1 严格劣策略的定义

手稿标题为:

1. 重复剔除严格劣策略.

在标准式博弈

$$G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$$

中, 设 s'_i 与 s''_i 是参与人 i 的两个可行策略。若对其他参与人的任意策略组合

$$s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n),$$

都有:

$$u_i(s'_i, s_{-i}) < u_i(s''_i, s_{-i}), \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}, \quad (4)$$

则 s'_i 是相对于 s''_i 的**严格劣策略**; 策略 s''_i 严格支配 s'_i 。

手稿原式写作:

$$\begin{aligned} & u_i(S_1, \dots, S_{i-1}, S'_i, S_{i+1}, \dots, S_n) \\ & < u_i(S_1, \dots, S_{i-1}, S''_i, S_{i+1}, \dots, S_n), \end{aligned}$$

并标注: 对其他参与者策略空间中每一种可能结果均成立。

若一个策略是严格劣策略, 则它不可能在理性选择中被采用, 可以从策略集合中剔除。不断重复这一操作, 即得到“重复剔除严格劣策略”。

2.2 囚徒困境中的严格支配

继续使用囚徒困境矩阵:

	B: 不招	B: 招
A: 不招	(-1, -1)	(-9, 0)
A: 招	(0, -9)	(-6, -6)

(5)

对于囚徒 A:

$$u_A(\text{招}, \text{不招}) > u_A(\text{不招}, \text{不招}), \quad (6)$$

$$u_A(\text{招}, \text{招}) > u_A(\text{不招}, \text{招}). \quad (7)$$

故“招”严格支配“不招”。

对于囚徒 B:

$$u_B(\text{不招}, \text{招}) > u_B(\text{不招}, \text{不招}), \quad (8)$$

$$u_B(\text{招}, \text{招}) > u_B(\text{招}, \text{不招}). \quad (9)$$

故 B 的“招”也严格支配“不招”。

所以双方均选择“招”, 原稿旁注为:

$$\text{“招”是占优策略。} \quad (10)$$

2.3 三策略例子：逐步剔除

手稿下部给出另一支付矩阵：

	B: 左	B: 中	B: 右
A: 上	(1, 0)	(1, 2)	(0, 1)
A: 下	(0, 3)	(0, 1)	(2, 0)

(11)

原稿将 (1, 2) 圈出，并在右侧写出剔除顺序。依矩阵数值可验证：

(1) 对 B 而言，“中”严格支配“右”：

$$2 > 1, \quad 1 > 0,$$

因此先删除 B 的“右”；

(2) 在删除“右”后的矩阵中，对 A 而言，“上”严格支配“下”：

$$1 > 0, \quad 1 > 0,$$

因此删除 A 的“下”；

(3) 只剩 A 的“上”时，对 B 而言，“中”优于“左”：

$$2 > 0,$$

因此最终结果为

$$(\text{上}, \text{中}), \quad \text{支付为}(1, 2). \quad (12)$$

手稿页末注明：

$$\text{common knowledge.} \quad (13)$$

即重复剔除依赖于理性以及理性为共同知识的假定。

3 纳什均衡：定义、反应函数与存在性

3.1 纳什均衡的定义

手稿页首写有：

NE： 在 n 个参与者标准式博弈中， $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$.

设策略组合为

$$s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*).$$

若对于每一个参与者 i ，给定其他参与人的均衡策略 s_{-i}^* 时， s_i^* 都是其最优策略，即：

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*), \quad \forall s_i \in S_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (14)$$

则称 s^* 为该博弈的纳什均衡 (Nash Equilibrium, NE)。

等价地：

$$s_i^* \in \arg \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}^*), \quad \forall i. \quad (15)$$

手稿圈注：

最优反应的组合 $\Rightarrow$ 均衡点。

3.2 反应函数交点：Cournot 与 Bertrand

手稿画出 Cournot 数量竞争与 Bertrand 价格竞争中的最优反应曲线，并将交点标记为 NE。为保持逻辑精确，下面仅用命名交点重绘结构，不对原稿曲线的具体斜率作额外推断。

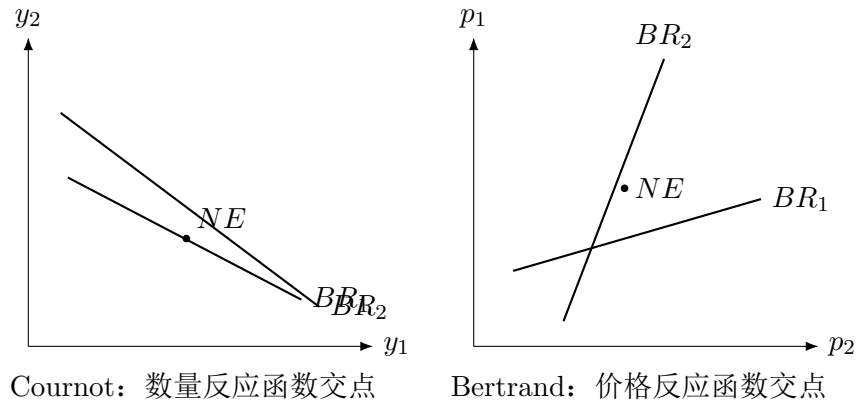


图 1: 纳什均衡是各参与者最优反应的交点；此图为逻辑结构重绘。

3.3 存在性说明

手稿底部写有：

Nash (1950) 证明在任何有限博弈（许多假设）都存在一个 NE（纯、混）。

更严格地按手稿意图整理为：对于有限标准式博弈，若允许混合策略，则至少存在一个纳什均衡。纯策略均衡未必存在，混合策略均衡用于补充纯策略解不存在的情形。

手稿页末还有一句：[原稿不清：忽略对方策略/避免单独偏离]。

4 零和博弈、协调博弈与混合策略

4.1 简单零和博弈：石头、剪刀、布

手稿标题为：简单的[原稿不清：合作/对抗]博弈。第一例为“石头、剪刀、布”，两个参与者分别选择石、剪、布，支付矩阵为：

	B: 石	B: 剪	B: 布	
A: 石	(0, 0)	(1, -1)	(-1, 1)	
A: 剪	(-1, 1)	(0, 0)	(1, -1)	
A: 布	(1, -1)	(-1, 1)	(0, 0)	(16)

手稿说明：

二个零和博弈，每个策略都有单独赢利动机，无纯策略的纳什均衡。

即任何纯策略组合下，至少一方都能通过改变自己的行动提高收益，因此不存在纯策略 NE。

4.2 协调博弈：性别之战

手稿第二例标题为：

性别之战.

参与者 A 与 B 需要共同选择两个活动之一；二人都偏好在一起，但对具体活动偏好不同。原稿的活动名字较轻，以下以“活动 I”“活动 II”保留结构：

	B: 活动 I	B: 活动 II	
A: 活动 I	(2, 1)	(0, 0)	
A: 活动 II	(0, 0)	(1, 2)	(17)

手稿旁注写有：

两个一起更快乐；两个纯策略均衡。

因此，该博弈具有两个纯策略纳什均衡：

$$(\text{活动 I, 活动 I}), \quad (\text{活动 II, 活动 II}). \quad (18)$$

4.3 混合策略的定义

手稿继续引入混合策略：对于参与人 i ，混合策略是其纯策略集合 S_i 上的概率分布。写为：

$$\sigma_i : S_i \rightarrow \mathbb{R}, \quad (19)$$

满足：

$$\sigma_i(s_i) \geq 0, \quad \forall s_i \in S_i, \quad (20)$$

并且：

$$\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1. \quad (21)$$

4.4 混合策略纳什均衡

设

$$\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$$

是一组混合策略。若对所有参与者 i 以及其任意混合策略 σ_i ，都有：

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*), \quad (22)$$

则称 σ^* 为一个混合策略纳什均衡。

手稿中该定义旁边写有：

给定其他参与人的策略，自己的混合策略不能通过单方面改变而提高收益。

5 混合策略均衡：无差异原则与均衡关系

5.1 无差异原则（支撑集上的最优化）

手稿页首将一个原则圈出，并写有“支付最优化法”。其内容是混合策略均衡中的无差异原则：若 σ^* 是一个混合策略 NE，则参与人 i 在均衡中以正概率采用的纯策略必须给予相同的期望收益。

形式化地，若

$$s_i, s'_i \in \text{supp}(\sigma_i^*), \quad (23)$$

则有：

$$u_i(s_i, \sigma_{-i}^*) = u_i(s'_i, \sigma_{-i}^*). \quad (24)$$

并且，对不在支撑集中的任意纯策略 $\tilde{s}_i$ ，有：

$$u_i(s_i, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(\tilde{s}_i, \sigma_{-i}^*), \quad s_i \in \text{supp}(\sigma_i^*). \quad (25)$$

手稿原文写有：

对每个参与人均有无差异。

5.2 性别之战的混合策略均衡

继续使用性别之战矩阵：

	B: L	B: R
A: U	(2, 1)	(0, 0)
A: D	(0, 0)	(1, 2)

(26)

设 A 以概率 p 选择 U ，以概率 $1 - p$ 选择 D ；B 以概率 q 选择 L ，以概率 $1 - q$ 选择 R 。

为了使 A 在 U 与 D 之间无差异，需要：

$$2q + 0(1 - q) = 0q + 1(1 - q). \quad (27)$$

因此：

$$2q = 1 - q, \quad q = \frac{1}{3}. \quad (28)$$

为了使 B 在 L 与 R 之间无差异，需要：

$$1p + 0(1 - p) = 0p + 2(1 - p). \quad (29)$$

因此：

$$p = 2(1 - p), \quad p = \frac{2}{3}. \quad (30)$$

所以混合策略均衡为：

$$\sigma_A^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \sigma_B^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right). \quad (31)$$

手稿写有：

$$\sigma_A = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \sigma_B = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ 是混合策略 NE.}$$

5.3 纯策略、混合策略与支配关系

手稿下部画有一组同心区域，表示不同解概念与策略集合之间的包含关系。可确定的标注包括：

- 外层：混合策略 NE (MNE)；
- 内层：纯策略 NE (PNE)；
- 更内层出现“weakly dominated”、[原稿不清：ZEDS/严格劣策略剔除相关缩写]；
- 最内层为[原稿不清：占优策略均衡/严格支配解]。

为保留手稿信息而不擅自校正集合包含方向，将图转写如下：

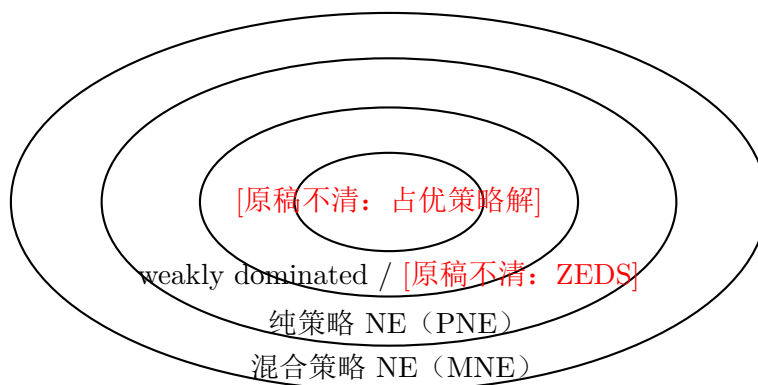


图 2: 原稿中的均衡与支配关系示意；缩写与集合方向待按教材复核。

5.4 零和博弈与一般博弈的区别

手稿该页还写有：

B. 任何 NE 不一定是对各参与者利益的最优结果。

这与囚徒困境一致：均衡要求没有人能够单方面获益地偏离，但不意味着均衡结果在集体福利意义上最好。

同时，石头、剪刀、布这类零和博弈可能没有纯策略均衡，但具有混合策略均衡；协调博弈如性别之战则可能既有多个纯策略均衡，也有混合策略均衡。

第二部分 第二部分：完全信息动态博弈与子博弈精炼均衡（第 4, 4.2–4.6, 8 页）

6 完全信息动态博弈、子博弈精炼均衡与相关例子

6.1 完全信息动态博弈的基本形式

手稿标题为：“完全信息动态博弈”。

一个两人顺序行动博弈可写为如下形式：

- (1) 参与者 1 先从行动集 A_1 中选择一个行动 a_1 ；

- (2) 参与者 2 观察到 a_1 之后, 再从自己的行动集中选择一个行动 a_2 ;
 (3) 两人的收益分别由

$$u_1(a_1, a_2), \quad u_2(a_1, a_2)$$

给出。

手稿将其与 **Stackelberg** 模型联系起来, 并写出其标准求解思路: 向后归纳法 (backward induction)。

第二阶段, 参与者 2 在给定 a_1 的情况下, 求解:

$$\max_{a_2 \in A_2} u_2(a_1, a_2),$$

从而得到参与者 2 的最优反应 (或反应函数):

$$a_2 = R_2(a_1). \quad (4.1)$$

第一阶段, 参与者 1 预见到参与者 2 的反应后, 求解:

$$\max_{a_1 \in A_1} u_1(a_1, R_2(a_1)). \quad (4.2)$$

若最优解为 a_1^* , 则该动态博弈可得到一个顺序理性结果:

$$(a_1^*, R_2(a_1^*)). \quad (4.3)$$

手稿旁注: 这一结果后来将与 SPNE (子博弈精炼纳什均衡) 联系起来。

6.2 扩展式博弈与有限重复博弈

手稿在本页左侧总结了扩展式博弈 (extensive form game) 的典型要素, 依原意可整理为:

1. 参与人的集合;
2. 先后顺序;
3. 行动空间;
4. 信息集;
5. 支付 (收益) 函数;
6. Nature (自然) 的随机动作及其概率分布 (若有)。

手稿还提到:

扩展博弈: 通常阶段博弈的结果是所有阶段博弈收益的简单加总。

并配以一个二维支付矩阵:

	招	不招	
招	(1, 1)	(5, 0)	(4.4)
不招	(0, 5)	(4, 4)	

这显然是在重复博弈背景下重写的囚徒困境型阶段博弈。

手稿下方注明: 对有限重复囚徒困境, 若使用向后归纳, 则往往导出每一期都不合作, 并指出这与“不可信的威胁”有关。

6.3 子博弈精炼纳什均衡 (SPNE) 的定义

手稿标题为:

Subgame perfect Nash equilibrium (SPNE).

手稿指出: 原有的纳什均衡概念存在不足, 至少包括两点:

- (1) 均衡可能过多;
- (2) 在动态博弈中, 某些策略包含对永远不会到达的节点的“反应”, 这些反应在纳什均衡中可以不是可信的, 从而出现**不可置信威胁** (non-credible threat)。

因此, 需要从所有 NE 中进一步筛选出“可信”的均衡, 这就是 **子博弈精炼纳什均衡**。

定义: 在一个扩展式博弈中, 若某策略组合在**每一个子博弈**中都构成纳什均衡, 则称其为一个子博弈精炼纳什均衡, 记作 SPNE。

形式化地, 若扩展式博弈 G 的策略组合为 s^* , 并且对 G 的每个子博弈 G' 而言, $s^*|_{G'}$ 都是 G' 中的纳什均衡, 则

$$s^* \text{ is a SPNE.} \quad (4.5)$$

6.4 一个进入威胁博弈: NE 与不可置信威胁

手稿给出一个两阶段博弈树例子, 其经济含义近似为“进入—报复”博弈。

第一阶段, 参与者 A 先选择

发起/不发起 (原稿中该词可能为进入/开战/进攻, 故保留模糊)。

第二阶段, 参与者 B 在观察到 A 的行动后, 选择

发/不发

(原稿中可能意为“报复/不报复”“战/不战”“打/不打”等)。

相应收益树可读为:

- 若 A 采取左支, B 可在该节点二选一, 得到

$$(-3, -3) \text{ 或 } (1, 0);$$

- 若 A 采取右支, B 可在另一节点二选一, 得到

$$(0, 1) \text{ 或 } (0, 0).$$

由于 B 在两个不同节点都要指定一个动作, 所以在标准式中, B 的纯策略必须写成一个**完整应对计划**。因此, B 有四个纯策略, 分别可记为:

$$(\text{发}, \text{发}), (\text{发}, \text{不发}), (\text{不发}, \text{发}), (\text{不发}, \text{不发}). \quad (4.6)$$

手稿列出该博弈有多个纯策略 NE, 并指出:

其中前两个均衡依赖于 B 的“威胁”, 但这个威胁在真正到达相应子博弈时并不理性, 因此不是可信威胁。

由此可见：

- 普通 NE 允许某些离开均衡路径的“威胁”存在；
- SPNE 要求这些离开均衡路径的行为本身也必须最优，因此排除了这类均衡。

6.5 子博弈的定义

手稿在后续页进一步解释了子博弈（subgame, SG）的定义。依其内容可整理为：

在一个扩展式博弈中，一个子博弈必须满足：

- (1) 它从某个决策节点开始；
- (2) 这个起点必须是一个单点信息集（singleton information set）；
- (3) 它包含该节点之后的所有后继节点；
- (4) 若一个信息集中的某个节点包含在该子博弈中，则该信息集中的所有节点都必须包含在该子博弈中。

手稿配图说明：上面的进入威胁博弈中可识别出两个真子博弈，记作 I 与 II 。因此，判断一个策略组合是否为 SPNE，必须检查：

- 它在整个博弈中是 NE；
- 它在子博弈 I 中也是 NE；
- 它在子博弈 II 中也是 NE。

手稿原句：

在子 I ， B 的战略是 [原稿不清：不发]；在子 II ， B [原稿不清：一发/再发]。

此处动作名称较模糊，但含义清楚：SPNE 要求在每个子博弈中的行为都可信。

6.6 关于三个 NE 的进一步分析

手稿 4.3 页依次分析了前述博弈中的三个 NE，并说明其中哪些是不可置信威胁。

手稿大意如下：

NE 1 记作

$$NE_1 = ([\text{不发}], \{[\text{发}], [\text{发}]\}). \quad (4.7)$$

其直观含义是： A 选择不发起，而 B 声称无论到达哪个节点都要“发”。手稿指出，这里的问题在于：如果真的进入某个子博弈， B 的“发”并不一定是最优反应，所以这只是一个威胁，而不是可信行动，因此不是 SPNE。

NE 2 记作

$$NE_2 = ([\text{发}], \{[\text{不发}], [\text{不发}]\}). \quad (4.8)$$

手稿说明：在某个子博弈中，若 A 偏离原来的路径， B 的承诺仍然可能不是最优，因此它也依赖于不可信威胁，故也不是 SPNE。

NE 3 记作

$$NE_3 = ([\text{发}], \{[\text{不发}], [\text{发}]\}). \quad (4.9)$$

手稿强调：这一均衡之所以“合理”，正因为因为在每一个可能到达的子博弈中， B 的行为都是最优的，故该策略组合是 SPNE。

原稿总结为：

只有最后一个例子是 SPNE。

6.7 SPNE 的向后归纳直觉

手稿 4.5 页标题可读为“家族/蜈蚣”一类动态博弈，并写有：

向后归纳法解决动态博弈。

同时原稿给出对 SPNE 的一个口语化直觉：

若所有节点都被到达，则所有参与人——无论在当前节点还是未来节点——都将理性地行动；并且这种理性是彼此预期到的。

因此，SPNE 的关键在于：

- 不是只在均衡路径上理性；
- 而是在每一个阶段、每一个可分离子博弈中都理性。

6.8 蜈蚣博弈（Centipede Game）与向后归纳

手稿以蜈蚣博弈（centipede game）说明向后归纳的威力。

图中含义是：在一个多阶段顺序博弈中，每个参与者轮流选择

A 或 D 。

若某个参与者在某阶段选择 D ，博弈立即停止并获得当期支付；若持续选择 A ，博弈会进入下一阶段，并可能在最后获得更高总收益。

手稿图下方文字大意为：

若每个参与人都相信所有后来者都会继续选择 A ，并且期数足够长，那么继续选择 A 似乎是有吸引力的；但向后归纳会从最后一期开始推出，最后一期的行动者会选 D ，于是倒推回去，前一期也选 D ，如此一直回到最初节点。

因此，有限蜈蚣博弈的 SPNE 往往是：

$$\text{第一位行动者在一开始就选 } D. \quad (4.10)$$

手稿还特别写到：

common knowledge（共同知识）对理性假设极为关键。

也就是说，只要“所有人都理性”“所有人都知道所有人都理性”这些假设稍有动摇，实验中的实际行为就可能偏离向后归纳的理论预言。

6.9 100 阶段蜈蚣博弈与实验现象

手稿 4.6 页把蜈蚣博弈进一步延长到很多阶段（原稿举出“100”这一数字）。图中表明：即使理论上 SPNE 预言非常早就停止，实验中参与者却常常在自己的节点上继续选择 A。

手稿的核心观点可整理为：

- (1) 在纯粹理性且共同知识成立的模型中，SPNE 要求早停；
- (2) 但若参与者对他人理性程度、耐心程度、利他性、失误概率等存在不确定性，则“继续合作/继续传递”的行为可以持续更久；
- (3) 因此，实验结果常常与简单向后归纳结论存在张力。

手稿页尾提到：

Selten (1975)

以及“[原稿不清：高台阶均衡/蜈蚣实验/信号与惯例]”等词，表明老师在把理论结果与行为实验联系起来。

6.10 银行挤兑（Bank Run）/ Diamond–Dybvig 型协调博弈

手稿最后一页标题为：

Bank Run（对挤兑的研究）.

原稿讲的是一个典型的 **Diamond and Dybvig (1983)** 型银行挤兑框架。

设有两个储户 A, B，各自存入一单位资金。二人都可以选择：

挤（早提取） 或 不挤（等待）.

手稿写出如下收益结构（个别符号轻微模糊，但逻辑很明确）：

	B: 挤	B: 不挤
A: 挤	(r, r)	$(D, 2R - D)$
A: 不挤	$(2R - D, D)$	(R, R)

(4.11)

这里：

- R 表示长期投资到期的高回报；
- D 表示一个人提前提款所能得到的即时回报；
- r 表示若银行被迫清算、两人都挤兑时各自得到的低回报。

手稿旁边给出条件，原意应为：

$$R > D > r, \quad (4.12)$$

并进一步讨论

$$2R - D > D, \quad 2R - D > R$$

等比较关系（原稿符号略有模糊，故在总审时应与课堂原模型复核）。

在这一协调博弈中，典型地会出现两个纯策略纳什均衡：

$$(\text{挤}, \text{挤}), \quad (\text{不挤}, \text{不挤}). \quad (4.13)$$

手稿总结为：

两个纯策略 NE；两个 SPNE。

并且用向后归纳思想解释：

- 若大家都相信别人会挤兑，那么自己最好也挤兑；
- 若大家都相信别人会等待，那么自己最好也等待；
- 因此银行体系可能出现“好均衡”和“坏均衡”。

页末注明：

Diamond and Dybvig (1983).

这说明银行挤兑从博弈论角度看，本质上是一个多重均衡问题：预期本身可以自我实现。

6.11 本批笔记小结

本批手写笔记主要围绕以下几条主线展开：

- (1) 完全信息动态博弈的求解通常依赖**向后归纳法**；
- (2) 普通纳什均衡允许不可置信威胁，因此在扩展式博弈中常需使用**子博弈精炼纳什均衡 (SPNE)**；
- (3) 子博弈的核心要求是：从某个单点信息集出发，并包含所有后继节点与完整信息集；
- (4) 蜈蚣博弈说明：理论上的向后归纳结果与实验中的真实行为可能有很大差异，其中共同知识、理性程度与行为偏差都很重要；
- (5) 银行挤兑问题可以表述为协调博弈，通常存在“挤兑”和“不挤兑”两个均衡，体现了预期自我实现与多重均衡的特征。

第三部分 第三部分：无限重复博弈、触发策略与 SPNE（第 5–6.3 页）

7 无限重复博弈与触发策略

7.1 无限重复博弈的贴现收益

手稿标题为：无限重复博弈。设每期收益序列为

$$\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_t, \dots,$$

贴现因子为

$$\delta \in (0, 1).$$

则无限期贴现收益的现值为：

$$\pi_1 + \delta\pi_2 + \delta^2\pi_3 + \dots = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1}\pi_t. \quad (5.1)$$

其中， δ 越大，表示参与人越重视未来收益； δ 越小，表示参与人越偏重当期收益。

7.2 阶段博弈：一个囚徒困境型例子

手稿给出如下阶段博弈矩阵。保留原稿行动记号：参与人 A 的行动为 U, D ，参与人 B 的行动为 L, R 。

	$B : L$	$B : R$	
$A : U$	$(1, 1)$	$(3, 0)$	
$A : D$	$(0, 3)$	$(2, 2)$	

(5.2)

在此收益结构中：

- (D, R) 给双方每期收益 $(2, 2)$ ，可视为“合作”结果；
- (U, L) 给双方每期收益 $(1, 1)$ ，是阶段博弈中的惩罚/非合作结果；
- 若对方仍合作而自己单方偏离，则偏离者当期可获得 3。

为后续表述方便，记：

$$C = (D, R), \quad P = (U, L). \quad (5.3)$$

其中 C 为合作行动组合， P 为惩罚行动组合。

7.3 严厉触发策略 (grim trigger strategy)

手稿写有 *trigger strategy*。其规则可整理为：

从第 1 期开始选择合作行动 C ；只要过去所有阶段双方都选择了合作，本期继续合作；一旦任何一方在任一期偏离合作，此后所有阶段永久选择惩罚行动 P 。

形式化地，对任意参与人 i ，严厉触发策略为：

$$s_i^t = \begin{cases} \text{合作行动,} & \text{若在 } 1, \dots, t-1 \text{ 期从未发生偏离;} \\ \text{惩罚行动,} & \text{若此前至少发生过一次偏离.} \end{cases} \quad (5.4)$$

7.4 合作与单次欺骗的收益比较

若双方始终合作，每期均获得 2，则单个参与人的贴现收益为：

$$V_C = 2 + 2\delta + 2\delta^2 + \dots = \frac{2}{1-\delta}. \quad (5.5)$$

若某参与人在当前期单方欺骗，在当期获得 3，但从下一期开始永久被惩罚，每期只获得 1，则其收益为：

$$V_D = 3 + \delta \cdot 1 + \delta^2 \cdot 1 + \dots = 3 + \frac{\delta}{1-\delta}. \quad (5.6)$$

合作可持续的条件是：

$$\frac{2}{1-\delta} \geq 3 + \frac{\delta}{1-\delta}. \quad (5.7)$$

化简得：

$$2 \geq 3 - 2\delta, \quad \delta \geq \frac{1}{2}. \quad (5.8)$$

因此，当

$$\delta \geq \frac{1}{2}$$

时，参与人足够重视未来，被永久惩罚的未来损失能够压制当期欺骗收益，合作可以由触发策略维持。

7.5 Folk Theorem 旁注

手稿页末写有：

Folk Thm：在无限次博弈中，存在许多 NE；不只双方每期都采取阶段博弈非合作均衡这一种情形，整个博弈存在很多 SPNE。

这一旁注意在说明：当参与人足够耐心时，重复互动与可信惩罚能够支持许多单阶段博弈中无法维持的长期结果，包括合作结果。

8 Cournot 重复博弈中的触发策略与以牙还牙

8.1 Cournot 下的严厉触发策略

手稿页首标题为:

Cournot 下的 trigger strategy.

设两个厂商重复进行 Cournot 数量竞争。记垄断/卡特尔总产量为 q^m ，则在合作状态下，每个厂商生产:

$$\frac{q^m}{2}. \quad (6.1)$$

手稿给出的触发策略可以整理为:

在第一阶段，每个企业都生产垄断产量的一半 $q^m/2$ 。在第 t 阶段，若此前所有阶段两企业都生产 $q^m/2$ ，则本期继续生产 $q^m/2$ ；否则转入 Cournot 惩罚。

令 q^c 表示单阶段 Cournot-Nash 均衡下每个厂商的产量，则严厉触发型数量策略可写为:

$$q_i^t = \begin{cases} q^m/2, & \text{若此前从未出现偏离;} \\ q^c, & \text{若此前曾出现偏离, 且惩罚永久持续.} \end{cases} \quad (6.2)$$

原稿中写有“出现 Cournot 竞争”，说明偏离合作后，企业回到非合作的 Cournot 均衡路径。

8.2 胡萝卜-大棒策略 (carrot-and-stick)

手稿中段标题可识别为:

carrot-and-stick, 胡萝卜-大棒.

与永久惩罚不同，胡萝卜-大棒策略允许惩罚持续有限阶段，然后在参与人遵守惩罚行动后重新回到合作状态。手稿文字可整理为:

第一阶段生产垄断产量的一半 $q^m/2$ ；若此前遵守合作，则继续合作；一旦出现偏离，下一阶段实施惩罚产量；若惩罚阶段被遵守，则随后恢复合作；若惩罚阶段再度偏离，则继续惩罚。

设惩罚产量为 x ，则可将这一策略的状态转换写为:

$$q_i^{t+1} = \begin{cases} q^m/2, & \text{若第 } t \text{ 期结果为 } (q^m/2, q^m/2) \text{ 或指定惩罚结果 } (x, x); \\ x, & \text{若第 } t \text{ 期发生非指定偏离.} \end{cases} \quad (6.3)$$

此处 x 的可行取值和激励条件将在后页继续推导。

8.3 以牙还牙策略 (tit for tat)

手稿下部写有“以牙还牙”策略，并标注英文:

tit for tat.

其规则为:

- (1) 从一开始便选择合作；
- (2) 在第 t 期，选择对方在第 $t-1$ 期采取的行动：

$$s_i^t = s_j^{t-1}, \quad t \geq 2. \quad (6.4)$$

因此，若双方始终合作，则合作持续；若一方曾经偏离，另一方下一期将复制该偏离行为。手稿特别写有：

(合作, 不合作) 与 (不合作, 合作) 交替出现，不能重新回到 (合作, 合作)。

该结论对应的是：发生一次单方偏离之后，若双方机械执行以牙还牙，可能陷入交替报复路径。

9 严厉触发策略为何可以构成 SPNE

9.1 合作状态下的无偏离条件

手稿标题为：

说明：trigger strategy 是 SPNE.

仍采用第 7.2 节的阶段博弈记号。为便于本节单独阅读，再列出收益矩阵：

	$B : L$	$B : R$	
$A : U$	$(1, 1)$	$(3, 0)$	(6.5)
$A : D$	$(0, 3)$	$(2, 2)$	

其中合作结果为 (D, R) ，惩罚结果为 (U, L) 。

假定 B 坚守触发策略。若过去没有发生偏离， A 继续合作时的收益为：

$$V_C = \frac{2}{1-\delta}. \quad (6.6)$$

若 A 当前单方偏离，则当期获得 3，之后 B 永久惩罚， A 每期获得 1：

$$V_D = 3 + \frac{\delta}{1-\delta}. \quad (6.7)$$

因此，合作历史之后 A 不偏离的条件为：

$$\frac{2}{1-\delta} \geq 3 + \frac{\delta}{1-\delta} \iff \delta \geq \frac{1}{2}. \quad (6.8)$$

对参与人 B 的论证完全对称。

9.2 偏离历史之后的可信惩罚

若此前已经发生过偏离，触发策略规定双方永久采取惩罚结果 (U, L) 。由于在阶段博弈中：

$$u_A(U, L) = 1 > 0 = u_A(D, L), \quad (6.9)$$

且

$$u_B(U, L) = 1 > 0 = u_B(U, R), \quad (6.10)$$

故 (U, L) 本身是阶段博弈的纳什均衡。

这意味着：一旦进入惩罚状态，任何一期的惩罚行动都是当期最优反应，惩罚是可信的；参与人不会在惩罚路径上单方面偏离。

9.3 两类子博弈与 SPNE 结论

手稿将无限重复博弈中的子博弈分为两类：

类型 A： 过去没有任何人背叛或偏离，当前处于合作状态；

类型 B： 过去至少有一人曾经背叛或偏离，当前处于永久惩罚状态。

对类型 A 子博弈，由式 (6.8) 可知：当 $\delta \geq 1/2$ 时，双方都有激励继续合作。对类型 B 子博弈，由惩罚结果本身为阶段博弈 NE，可知永久惩罚在每个续博弈中都是可信的。

因此：

$$\boxed{\delta \geq \frac{1}{2} \implies \text{严厉触发策略构成一个 SPNE.}} \quad (6.11)$$

手稿进一步指出：无限重复博弈从任意一个阶段开始后的续博弈，与原博弈的结构相同；因此，只有在每一类续博弈中均不存在有利偏离，触发策略才是 SPNE。

10 有限期惩罚：胡萝卜—大棒策略的激励约束

10.1 例题设定与策略规则

手稿标题为：

例题：[/ -- SPNE].

原稿考虑两个企业在重复数量竞争中的合作维持问题。设：

- 合作状态下，每家企业生产垄断总产量的一半：

$$q_i = \frac{q^m}{2}; \quad (6.12)$$

- 惩罚状态下，每家企业生产指定惩罚产量：

$$q_i = x; \quad (6.13)$$

- 若合作期发生偏离，下一期进入惩罚状态；
- 若惩罚期双方均遵守指定惩罚产量 (x, x) ，随后恢复合作；
- 若惩罚期仍发生偏离，继续实施惩罚。

以状态形式表示：

$$q_i^{t+1} = \begin{cases} q^m/2, & \text{若第 } t \text{ 期结果为 } (q^m/2, q^m/2) \text{ 或 } (x, x); \\ x, & \text{若第 } t \text{ 期结果既不是 } (q^m/2, q^m/2) \text{ 也不是 } (x, x). \end{cases} \quad (6.14)$$

手稿明确将续博弈划分为：

- (1) **合作子博弈**：前一阶段的结果为 $(q^m/2, q^m/2)$ 或指定状态 (x, x) ，本阶段进入/维持合作；
- (2) **惩罚子博弈**：前一阶段结果偏离规定路径，本阶段执行惩罚产量 x 。

10.2 合作子博弈中的激励约束

记：

- π^m ：两企业联合利润最大化时的总利润，故合作状态下每家企业单期利润为 $\pi^m/2$ ；
- π^d ：在对手仍生产 $q^m/2$ 时，某企业单期偏离合作所能获得的最大利润；
- $\pi(x)$ ：双方均实施惩罚产量 (x, x) 时，每家企业单期利润。

若企业在合作状态中不偏离，则当前期与下一期均获得合作利润：

$$\frac{1}{2}\pi^m + \delta \frac{1}{2}\pi^m. \quad (6.15)$$

若企业当前偏离，则当期获得 π^d ，下一期进入惩罚状态获得 $\pi(x)$ 。由于此后共同延续收益在两条路径中相同，可以约去，故合作状态中的无偏离条件为：

$$\frac{1}{2}\pi^m + \delta \frac{1}{2}\pi^m \geq \pi^d + \delta \pi(x). \quad (6.16)$$

等价地：

$$\delta \left(\frac{1}{2}\pi^m - \pi(x) \right) \geq \pi^d - \frac{1}{2}\pi^m. \quad (6.17)$$

其经济含义为：未来一阶段由惩罚造成的贴现损失，必须至少弥补当前单方偏离所带来的额外利润。

10.3 惩罚子博弈中的激励约束

手稿 6.3 页继续考虑惩罚状态。记 π^{dp} 为在对手按照惩罚要求生产 x 时，某企业偏离惩罚行动所能获得的单期最大利润。

若企业遵守惩罚规定，则本期获得 $\pi(x)$ ，下一期恢复合作并获得 $\pi^m/2$ ：

$$\pi(x) + \delta \frac{1}{2} \pi^m. \quad (6.18)$$

若企业在惩罚期偏离，则本期获得 π^{dp} ，下一期仍处于惩罚状态并获得 $\pi(x)$ 。因此，惩罚状态中遵守惩罚行动的条件为：

$$\pi(x) + \delta \frac{1}{2} \pi^m \geq \pi^{dp} + \delta \pi(x). \quad (6.19)$$

等价地：

$$\delta \left(\frac{1}{2} \pi^m - \pi(x) \right) \geq \pi^{dp} - \pi(x). \quad (6.20)$$

手稿文字可整理为：

从惩罚阶段不遵守规定所得到的单期额外收益，不得超过下一阶段无法恢复合作而造成的贴现损失。

10.4 惩罚强度与可实施区间

式 (6.17) 与式 (6.20) 共同限制惩罚产量 x ：

- 惩罚不能太轻，否则合作期中的偏离收益无法被未来损失抵消；
- 惩罚也不能过重，否则企业在惩罚阶段本身会选择偏离，惩罚不再可信。

原稿在此写有：

$$\delta = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \quad x \in [\text{某下界}, \text{某上界}]. \quad (6.21)$$

区间端点在图片中无法可靠辨识，故保留待结合课堂教材或后续笔记核验。

手稿结论为：将合作状态和惩罚状态的激励约束结合，可求出保证该胡萝卜-大棒策略构成 SPNE 的惩罚产量区间。

10.5 严厉触发与有限期惩罚的比较

手稿提到：当 δ 足够大时，严厉触发策略能够维持合作；但在某些情况下，适当设计的有限期惩罚也可以维持合作，并可能比永久惩罚更有效率。

可整理为：

- 严厉触发：一旦偏离，永远转入非合作均衡，惩罚非常强；
- 胡萝卜-大棒：偏离后惩罚有限期，遵守惩罚后可恢复合作；
- 后者必须同时保证“合作时不偏离”和“惩罚时不偏离”，即满足两组激励约束。

11 以牙还牙为何未必是 SPNE

11.1 以牙还牙的路径性质

手稿下半部分标题为：

证明：tit for tat 不是 SPNE.

以牙还牙策略规定：第一期合作，此后复制对方上一期行动。若某一方曾单方偏离，机械执行以牙还牙可能产生交替路径：

$$(C,D), (D,C), (C,D), (D,C), \dots \quad (6.22)$$

手稿文字可辨识为：在该交替路径下，参与人轮流获得

$$\pi(C,D) \text{ 和 } \pi(D,C), \quad (6.23)$$

而某参与人可能通过进一步偏离，使路径转为

$$(D,D), \quad (6.24)$$

从而获得更高的续期收益。

11.2 与 SPNE 的冲突

由于 SPNE 要求策略在任意历史之后诱导的续博弈中都构成纳什均衡，只要存在某个偏离历史，使得以牙还牙所规定的下一步行动并非参与人的最优反应，则以牙还牙便不能构成 SPNE。

手稿最终结论为：

以牙还牙在某些历史之后会产生可获利偏离，因此在本例中不是 SPNE。

与之相比，严厉触发策略在 $\delta \geq 1/2$ 时之所以能构成 SPNE，是因为其惩罚路径本身落在阶段博弈的纳什均衡上，惩罚具有可信性。

12 本批笔记小结

本批笔记从无限重复博弈出发，讨论合作如何被未来惩罚支持：

- (1) 无限重复博弈中的总收益是贴现收益流之和；贴现因子越大，未来惩罚越有约束力；
- (2) 在囚徒困境型阶段博弈中，严厉触发策略可在 $\delta \geq 1/2$ 时支持合作，并构成 SPNE；
- (3) 在重复 Cournot 模型中，合作表现为每家厂商生产垄断产量的一半；偏离后可触发 Cournot 惩罚或有限期数量惩罚；
- (4) 胡萝卜-大棒策略需要同时满足合作状态和惩罚状态的激励约束，惩罚强度须处在可实施区间内；
- (5) 以牙还牙虽然具有互惠直觉，但在某些偏离历史后的续博弈中可能不是最优反应，因而未必是 SPNE。

第四部分 第四部分：进入阻止、限制性定价与贝叶斯博弈（第 7–10 页）

13 不可置信的威胁：在位厂商以产量阻止进入

13.1 垄断者独占市场时的最优选择

手稿标题为：

不可置信的威胁（incredible threat）。

首先考虑一个垄断者独占市场的情形。反需求函数为：

$$p = 13 - x, \quad (7.1)$$

成本函数为：

$$C(x) = x + 6.25. \quad (7.2)$$

因而垄断者利润为：

$$\begin{aligned} \pi_M(x) &= (13 - x)x - x - 6.25 \\ &= 12x - x^2 - 6.25. \end{aligned} \quad (7.3)$$

利润最大化的一阶条件为：

$$\frac{d\pi_M}{dx} = 12 - 2x = 0,$$

所以：

$$x^* = 6, \quad \pi_M^* = 29.75. \quad (7.4)$$

13.2 新厂商进入后的利润

若新厂商进入，原在位厂商维持原垄断产量 $x = 6$ ，新进入者选择产量 y 。市场价格变为：

$$p = 13 - 6 - y. \quad (7.5)$$

手稿标注“成本一样”，故进入者利润为：

$$\begin{aligned} \pi_E(y) &= (13 - 6 - y)y - y - 6.25 \\ &= 6y - y^2 - 6.25. \end{aligned} \quad (7.6)$$

一阶条件为：

$$6 - 2y = 0,$$

所以：

$$y^* = 3, \quad \pi_E = 2.75. \quad (7.7)$$

在位厂商在 $x = 6, y = 3$ 时的利润为：

$$\begin{aligned} \pi_I &= (13 - 6 - 3) \cdot 6 - 6 - 6.25 \\ &= 11.75. \end{aligned} \quad (7.8)$$

因此，在位厂商仅维持原垄断产量时，进入者存在正利润，会选择进入。

13.3 以高产量威胁阻止进入

手稿进一步考察：若在位厂商预先声称或承诺生产

$$x^0 = 7, \quad (7.9)$$

是否能够阻止进入。此时进入者利润为：

$$\begin{aligned} \pi_E(y | x^0 = 7) &= (13 - 7 - y)y - y - 6.25 \\ &= 5y - y^2 - 6.25. \end{aligned} \quad (7.10)$$

其最优进入产量满足：

$$5 - 2y = 0, \quad y^0 = 2.5. \quad (7.11)$$

代入得：

$$\pi_E(y^0 | x^0 = 7) = 0. \quad (7.12)$$

手稿结论写为：

若 x 先定为 7，可抑制威胁，阻止 y 进入；潜在进入者不会进入。

13.4 为什么这是不可置信威胁

问题在于：一旦进入实际发生，在位厂商是否还愿意维持 $x = 7$ ？若进入后双方均重新优化，利润函数为：

$$\pi_I(x, y) = (13 - x - y)x - x - 6.25, \quad (7.13)$$

$$\pi_E(x, y) = (13 - x - y)y - y - 6.25. \quad (7.14)$$

两厂商的最优反应满足：

$$\frac{\partial \pi_I}{\partial x} = 12 - 2x - y = 0, \quad \frac{\partial \pi_E}{\partial y} = 12 - x - 2y = 0. \quad (7.15)$$

对称解为：

$$x^* = y^* = 4. \quad (7.16)$$

相应利润为：

$$\pi_I = \pi_E = (13 - 4 - 4) \cdot 4 - 4 - 6.25 = 9.75. \quad (7.17)$$

由此可见，进入发生后，在位厂商不会选择先前声称的高产量 $x = 7$ ，而会重新选择 $x = 4$ 。因此，以 $x = 7$ 阻止进入的威胁并不可信。

手稿右侧结论可整理为：

威胁不可信，除非在位厂商能够事先把 $x = 7$ 变成具有约束力的承诺，例如通过不可逆的产能投资锁定自己的高产量选择。

14 进入、退出策略：沉淀成本与承诺

14.1 进入阻止问题的背景

手稿标题为：**进入、退出策略**。正文指出：在位厂商若希望阻止进入或应对新竞争者，必须判断自己当前的行动会如何影响未来市场结构，并基于对竞争对手反应的预判作出策略选择。

手稿列出进入阻止战略的主要逻辑：

- 沉淀成本与承诺；
- 为进入者制造潜在进入成本，例如增加投资、特定设备支出，或从事特定定位的职业训练；
- “置之死地而后生”：通过不可逆选择使进入后的强硬竞争成为可信；
- 在顺序博弈中形成先动优势，并试图“制定一个有利于自己的 NE”。

手稿还写有：

进入阻止：有规模经济时更多易进行。

即存在较大固定成本或规模经济时，潜在进入者必须达到一定销量才可覆盖成本，因此在位厂商通过扩产压低进入后的可获利润，更容易阻止进入。

14.2 例题设定：固定成本与线性需求

手稿给定：

$$Q = q_1 + q_2 = 120 - p,$$

因此反需求函数为：

$$p = 120 - q_1 - q_2. \quad (8.1)$$

双方均面对固定成本：

$$FC = 784. \quad (8.2)$$

厂商 1、2 的利润函数写为：

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (120 - q_1 - q_2)q_1 - 784 \\ &= 120q_1 - q_1^2 - q_1q_2 - 784, \end{aligned} \quad (8.3)$$

$$\begin{aligned} \pi_2 &= (120 - q_1 - q_2)q_2 - 784 \\ &= 120q_2 - q_2^2 - q_1q_2 - 784. \end{aligned} \quad (8.4)$$

若厂商 1 已经选择 q_1 ，潜在进入者厂商 2 的一阶条件为：

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 120 - q_1 - 2q_2 = 0,$$

因此其最优反应为：

$$q_2 = \frac{120 - q_1}{2}. \quad (8.5)$$

14.3 在位厂商通过扩产压缩进入利润

手稿将式 (8.5) 代入潜在进入者利润。由

$$p = 120 - q_1 - q_2 \quad (8.6)$$

以及

$$q_2 = \frac{120 - q_1}{2},$$

可得在最优反应下：

$$p = \frac{120 - q_1}{2} = q_2. \quad (8.7)$$

故进入者最大利润为：

$$\begin{aligned} \pi_2^{\max}(q_1) &= pq_2 - 784 \\ &= \left(\frac{120 - q_1}{2} \right)^2 - 784. \end{aligned} \quad (8.8)$$

要使进入者无正利润，需要：

$$\left(\frac{120 - q_1}{2} \right)^2 - 784 \leq 0. \quad (8.9)$$

由于

$$\sqrt{784} = 28,$$

式 (8.9) 给出：

$$\frac{120 - q_1}{2} \leq 28, \quad q_1 \geq 64. \quad (8.10)$$

因此，只要在位厂商预先承诺产量满足

$$q_1 \geq 64,$$

潜在进入者便无法获得正利润，进入可被阻止。

14.4 阻止进入时在位厂商利润

手稿取临界承诺产量：

$$q_1 = 64. \quad (8.11)$$

若进入被成功阻止，则

$$q_2 = 0, \quad p = 120 - 64 = 56. \quad (8.12)$$

在位厂商利润为：

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 56 \cdot 64 - 784 \\ &= 2800. \end{aligned} \quad (8.13)$$

手稿旁注为：

厂商 1 代价选择策略更好；固定成本与先动优势 $\Rightarrow$ 阻止成为引例。

原意可整理为：由于固定成本使进入者需要足够大市场空间才能盈利，在位厂商可以通过可信的扩产承诺牺牲一部分垄断利润，换取保持垄断地位的好处。

15 限制性定价与信息不对称

15.1 在位厂商的成本类型与进入者决策

手稿标题可辨认为：限制性定价与信息不对称。图中在位厂商 A 可能为高成本或低成本类型；潜在进入者 B 在观察到相关信息后选择“进”或“不进”。

原稿树形图的终点支付为：

- 若 A 为高成本型， B 进入时支付为 $(1, 3)$ ，不进入时为 $(4, 0)$ ；
- 若 A 为低成本型， B 进入时支付为 $(3, -1)$ ，不进入时为 $(6, 0)$ 。

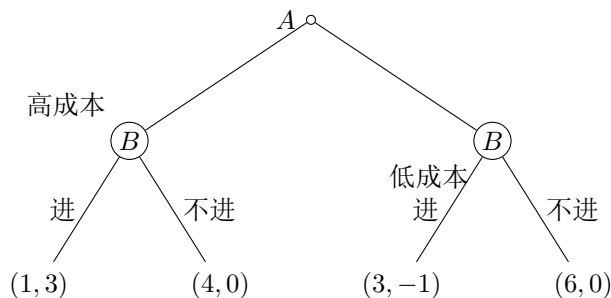


图 3: 原稿中的成本类型与进入决策树：结构性重绘。

这里“ A 选择高/低成本”的树形标法更准确地应理解为： A 的成本类型可能为高或低，而 B 并不直接知道该类型。原稿将 A 标在根部，本稿保留图中逻辑，并在文字中说明其类型含义。

15.2 进入者的信念与进入条件

手稿写有：

B 估计厂商 A 为高成本的概率为 p ，低成本的概率为 $1 - p$ 。

若 B 进入，则其期望利润为：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\pi_B | \text{进}) &= p \cdot 3 + (1 - p)(-1) \\ &= 4p - 1.\end{aligned}\tag{9.1}$$

进入条件为：

$$\mathbb{E}(\pi_B | \text{进}) > 0,$$

即：

$$4p - 1 > 0 \iff p > \frac{1}{4}.\tag{9.2}$$

因此，当潜在进入者认为在位厂商为高成本型的概率足够高时，它会选择进入；若其相信在位厂商更可能是低成本型，则可能不进入。

15.3 限制性定价作为信号

手稿指出： A 不能直接影响 B 对自身成本类型的判断，除非 A 采取可观察的行动，例如定价或产量选择。因此，低成本在位厂商可能通过低价策略向进入者发送自己“强硬、低成本”的信号，以阻止进入。

原稿写有：

即使 B 相信 $p < 1/4$ ， A 采取低价策略；其时 A 是低成本。 A 若是高成本也会争取限制性定价，以牺牲部分利润为代价；复杂： B 也知道 A 会冒充信号，动机判断存在。

这反映了信号博弈的关键问题：

- 低成本型厂商愿意通过低价阻止进入；
- 高成本型厂商也可能模仿低成本型，尝试发出同样的低价信号；
- 若模仿成本太低，低价就不能可信地揭示类型；
- 只有当信号对不同类型的成本不同，才可能形成分离均衡。

15.4 可置信的低价与现实例子

手稿下半部分写有：

持有信息者：要发送可信的低价，“ $P < AC$ ”。[原稿不清：1944/1974 年 Stano/Standard Oil]，掠夺性定价的条件问题。

并列信号或策略行为包括：

- 低价 $\Rightarrow$ 低成本信号；
- 扩张生产；
- 产品差别行为；
- 潜在进入者进行成本估计、识别在位厂商类型；
- 现实经济中的限制性定价或掠夺性定价问题。

原稿末尾疑似写有“欧美法律/市场”一类旁注，无法可靠确认，记为：[原稿不清：现实案例与法律规制旁注]。

16 不完全信息静态博弈：贝叶斯博弈

16.1 贝叶斯博弈的组成

手稿标题为：

不完全信息静态博弈（Bayesian Game）.

对于两个参与人 A 与 B ，手稿将一个贝叶斯博弈写为：

$$G = [S_A, S_B, t_A, t_B, f_A, f_B, U_A(a, b, t_A, t_B), U_B(a, b, t_A, t_B)]. \quad (10.1)$$

其中：

- S_A, S_B ：参与人 A, B 的策略空间；
- t_A, t_B ：参与人 A, B 的类型；
- f_A, f_B ：参与人关于对方类型的信念或概率分布；
- U_A, U_B ：在行动和类型给定时的收益函数。

手稿写有：

不确定 $\Rightarrow$ 不同类型的局中人； (t_A, t_B) 表示每个人了解自己的类型，不了解对方的类型。

16.2 信念函数

手稿写出 A 对 B 类型的信念函数：

$$f_A(t_B). \quad (10.2)$$

其含义为：

A 对于 B 属于何种类型的概率估计，由此判断在不同可能类型下应选择何种行动。

类似地， B 对 A 类型的信念表示为：

$$f_B(t_A). \quad (10.3)$$

16.3 贝叶斯纳什均衡（BNE）

设策略组合为 (a^*, b^*) 。对于参与人 A ，给定 B 的策略 b^* ，其均衡行动 a^* 必须最大化基于 A 对 B 类型信念的期望收益：

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_A[U_A(a^*, b^*, t_A, t_B)] &= \sum_{t_B} f_A(t_B) U_A(a^*, b^*, t_A, t_B) \\ &\geq \mathbb{E}_A[U_A(a', b^*, t_A, t_B)], \quad \forall a' \in S_A. \end{aligned} \quad (10.4)$$

对于参与人 B ，给定 A 的策略 a^* ，其均衡行动 b^* 必须最大化基于 B 对 A 类型信念的期望收益：

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_B[U_B(a^*, b^*, t_A, t_B)] &= \sum_{t_A} f_B(t_A) U_B(a^*, b^*, t_A, t_B) \\ &\geq \mathbb{E}_B[U_B(a^*, b', t_A, t_B)], \quad \forall b' \in S_B. \end{aligned} \quad (10.5)$$

说明：原稿式 (10.5) 右侧手写为 $U_A(a^*, b', t_A, t_B)$ ，按贝叶斯纳什均衡定义应为 $U_B(a^*, b', t_A, t_B)$ ；本稿在正文中按定义订正，并保留此处校勘说明。

16.4 均衡含义

若 (a^*, b^*) 满足式 (10.4)–(10.5)，则称其为贝叶斯纳什均衡。手稿结尾写有：

(a^*, b^*) 满足：给定 b^* 为 B 的策略， a^* 是 A 的最优选择；给定 a^* 为 A 的策略， b^* 是 B 的最优选择。

与完全信息静态博弈不同，贝叶斯博弈中的最优选择不是仅对已知行动作出反应，而是要对未知类型按照信念分布计算期望收益后作出最优反应。

17 本批笔记小结

第 7–10 页完成了从完全信息动态进入博弈到不完全信息博弈的过渡：

- (1) 在进入阻止博弈中，仅仅声称进入后将大幅扩产并不足以阻止进入，因为这种威胁在进入真正发生后可能不再最优，因而是不可置信威胁；
- (2) 若在位厂商能够通过沉淀成本、不可逆投资或预先扩产，把强硬反应转化为真实承诺，则可能可信地阻止进入；
- (3) 在固定成本较大的产业中，预先承诺较高产量可以压缩潜在进入者的利润空间；
- (4) 当进入者不了解在位厂商成本类型时，低价和扩产可被用作类型信号，但高成本型也可能模仿，因而产生限制性定价的信号识别问题；
- (5) 贝叶斯博弈使用类型与信念刻画不完全信息，贝叶斯纳什均衡要求每一方在其信念下最大化期望收益。

第五部分 第五部分：贝叶斯古诺、性别之战与拍卖（第 11.0–13 页）

18 贝叶斯–古诺问题：竞争者成本类型不确定

18.1 完全信息基准

手稿标题可辨认为：贝叶斯–古诺问题。市场反需求函数为：

$$p = 100 - q_A - q_B. \quad (11.1)$$

在完全信息基准下，两厂商边际成本相同：

$$MC_A = MC_B = 10. \quad (11.2)$$

若进行同时数量竞争，则对称古诺均衡为：

$$q_A = q_B = 30, \quad (11.3)$$

价格为：

$$p = 100 - 30 - 30 = 40, \quad (11.4)$$

每家厂商利润为：

$$\pi_A = \pi_B = (40 - 10) \cdot 30 = 900. \quad (11.5)$$

18.2 信息不完全：厂商 B 的成本有两种类型

手稿随后设定：厂商 A 的边际成本仍为确定值：

$$MC_A = 10, \quad (11.6)$$

但厂商 B 的边际成本有两种可能类型：

$$MC_{BH} = 16, \quad MC_{BL} = 4. \quad (11.7)$$

两种类型出现的概率均为 0.5：

$$\text{Prob}(H) = \text{Prob}(L) = \frac{1}{2}. \quad (11.8)$$

厂商 A 无法确定 B 的真实成本类型，只知道其分布。手稿标注：

$$\mathbb{E}(MC_B) = \frac{1}{2} \cdot 16 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 10. \quad (11.9)$$

18.3 厂商 B 的类型依赖反应函数

若厂商 B 的成本类型为 MC_B ，则其利润函数为：

$$\begin{aligned} \pi_B &= (p - MC_B)q_B \\ &= (100 - MC_B - q_A - q_B)q_B. \end{aligned} \quad (11.10)$$

一阶条件为：

$$\frac{\partial \pi_B}{\partial q_B} = 100 - MC_B - q_A - 2q_B = 0. \quad (11.11)$$

因此，B 的最优反应为：

$$q_B^* = \frac{100 - MC_B - q_A}{2}. \quad (11.12)$$

对于高成本型 B_H ，由 $MC_{BH} = 16$ 得：

$$q_{BH}^* = \frac{84 - q_A}{2}. \quad (11.13)$$

对于低成本型 B_L ，由 $MC_{BL} = 4$ 得：

$$q_{BL}^* = \frac{96 - q_A}{2}. \quad (11.14)$$

18.4 厂商 A 的期望利润最大化

厂商 A 不知道 B 的实际成本类型，因此选择 q_A 以最大化期望利润：

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\pi_A &= \frac{1}{2}(100 - MC_A - q_A - q_{BH})q_A \\ &\quad + \frac{1}{2}(100 - MC_A - q_A - q_{BL})q_A. \end{aligned} \quad (11.15)$$

代入 $MC_A = 10$ ：

$$\mathbb{E}\pi_A = \left(90 - q_A - \frac{1}{2}q_{BH} - \frac{1}{2}q_{BL}\right)q_A. \quad (11.16)$$

厂商 A 的一阶条件为：

$$q_A^* = \frac{90 - \frac{1}{2}q_{BH} - \frac{1}{2}q_{BL}}{2}. \quad (11.17)$$

联立式 (11.13)、式 (11.14) 与式 (11.17)，手稿给出的均衡产量为：

$$q_A^* = 30, \quad q_{BH}^* = 27, \quad q_{BL}^* = 33. \quad (11.18)$$

18.5 原稿留待求解处的利润校验

手稿在均衡数量之后写有箭头，留待计算

$$\pi_A^*, \quad \pi_{BH}^*, \quad \pi_{BL}^*.$$

按上述均衡数量补算如下。

若 B 为高成本型：

$$p_H = 100 - 30 - 27 = 43, \quad (11.19)$$

$$\pi_A(H) = (43 - 10) \cdot 30 = 990, \quad (11.20)$$

$$\pi_{BH} = (43 - 16) \cdot 27 = 729. \quad (11.21)$$

若 B 为低成本型：

$$p_L = 100 - 30 - 33 = 37, \quad (11.22)$$

$$\pi_A(L) = (37 - 10) \cdot 30 = 810, \quad (11.23)$$

$$\pi_{BL} = (37 - 4) \cdot 33 = 1089. \quad (11.24)$$

故厂商 A 的期望利润为：

$$\mathbb{E}\pi_A = \frac{1}{2} \cdot 990 + \frac{1}{2} \cdot 810 = 900. \quad (11.25)$$

这个结果说明：尽管 B 的成本不确定会使不同状态下的产量、价格和利润不同，但在本题给定的对称概率与平均成本条件下， A 的期望利润恰好等于完全信息对称基准中的 900。

19 性别之战的贝叶斯纳什均衡：私人偏好扰动

19.1 完全信息下的性别之战

手稿标题为：性别之战的 **Bayesian Nash** 均衡。先给出完全信息下的性别之战支付矩阵。参与者记为 Chris 与 Pat，二者可选择 O 或 F ：

	Pat: O	Pat: F	
Chris: O	$(2, 1)$	$(0, 0)$	
Chris: F	$(0, 0)$	$(1, 2)$	(11.26)

该博弈具有两个纯策略均衡 (O, O) 、 (F, F) ，以及一个混合策略均衡。由于双方不知道应协调到哪一个纯策略均衡，手稿引入私人偏好扰动，将其写成不完全信息博弈。

19.2 加入私人类型扰动

手稿右侧给出的扰动后支付矩阵为：

	Pat: O	Pat: F	
Chris: O	$(2 + t_C, 1)$	$(0, 0)$	
Chris: F	$(0, 0)$	$(1, 2 + t_P)$	(11.27)

其中：

- t_C 是 Chris 的私人类型：它提高 Chris 在共同选择 O 时的收益；
- t_P 是 Pat 的私人类型：它提高 Pat 在共同选择 F 时的收益；
- 双方仅观察到自己的私人类型，不观察对方的私人类型。

手稿将贝叶斯博弈写为：

$$G = \{A_C, A_P, T_C, T_P, P_C, P_P, u_C, u_P\}, \quad (11.28)$$

其中：

$$A_C = A_P = \{O, F\}, \quad (11.29)$$

类型空间为：

$$T_C = T_P = (0, \lambda), \quad (11.30)$$

并假定私人类型独立且服从 $(0, \lambda)$ 上的均匀分布：

$$P_C(t_P) = P_P(t_C) = \frac{1}{\lambda}. \quad (11.31)$$

19.3 截断型策略

手稿采用截断策略。令 c 为 Chris 的类型临界值， p 为 Pat 的类型临界值：

$$\text{Chris 选择 } O \iff t_C > c, \quad (11.32)$$

$$\text{Pat 选择 } F \iff t_P > p. \quad (11.33)$$

因此：

$$\text{Prob}(\text{Chris 选 } O) = \frac{\lambda - c}{\lambda}, \quad (11.34)$$

$$\text{Prob}(\text{Pat 选 } F) = \frac{\lambda - p}{\lambda}. \quad (11.35)$$

相应地：

$$\text{Prob}(\text{Pat 选 } O) = \frac{p}{\lambda}, \quad \text{Prob}(\text{Chris 选 } F) = \frac{c}{\lambda}. \quad (11.36)$$

19.4 Chris 的临界类型条件

给定 Pat 的截断策略，类型为 t_C 的 Chris 若选择 O ，其期望收益为：

$$\begin{aligned} U_C(O | t_C) &= \frac{p}{\lambda}(2 + t_C) + \left(1 - \frac{p}{\lambda}\right) \cdot 0 \\ &= \frac{p}{\lambda}(2 + t_C). \end{aligned} \quad (11.37)$$

若选择 F ，其期望收益为：

$$\begin{aligned} U_C(F | t_C) &= \frac{p}{\lambda} \cdot 0 + \left(1 - \frac{p}{\lambda}\right) \cdot 1 \\ &= 1 - \frac{p}{\lambda}. \end{aligned} \quad (11.38)$$

临界类型 $t_C = c$ 对两行动无差异：

$$\frac{p}{\lambda}(2 + c) = 1 - \frac{p}{\lambda}. \quad (11.39)$$

化简得：

$$c = \frac{\lambda}{p} - 3. \quad (11.40)$$

于是 Chris 在

$$t_C > c = \frac{\lambda}{p} - 3 \quad (11.41)$$

时选择 O 。

19.5 Pat 的临界类型条件

类似地，给定 Chris 的截断策略，类型为 t_P 的 Pat 在选择 F 时的期望收益为：

$$U_P(F | t_P) = \frac{c}{\lambda}(2 + t_P), \quad (11.42)$$

而选择 O 时的期望收益为：

$$U_P(O | t_P) = 1 - \frac{c}{\lambda}. \quad (11.43)$$

这里按原稿页面的后续公式，等价地写临界条件为：

$$p = \frac{\lambda}{c} - 3. \quad (11.44)$$

原稿在此处的概率方向书写较压缩；式 (11.44) 是其明确圈出的临界方程，保留为求解依据。

19.6 对称贝叶斯均衡与极限

考虑对称截断均衡：

$$p = c. \quad (11.45)$$

由式 (11.40) 或式 (11.44) 得：

$$p = \frac{\lambda}{p} - 3, \quad (11.46)$$

即：

$$p^2 + 3p - \lambda = 0. \quad (11.47)$$

取非负根：

$$p = c = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4\lambda}}{2}. \quad (11.48)$$

Chris 选择 O 的概率与 Pat 选择 F 的概率均为：

$$\frac{\lambda - c}{\lambda} = \frac{\lambda - p}{\lambda} = 1 - \frac{-3 + \sqrt{9 + 4\lambda}}{2\lambda}. \quad (11.49)$$

手稿最后考察私人扰动趋于消失，即 $\lambda \rightarrow 0$ 。利用极限：

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda - c}{\lambda} &= 1 - \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{-3 + \sqrt{9 + 4\lambda}}{2\lambda} \\ &= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned} \quad (11.50)$$

因此：

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \text{Prob}(\text{Chris 选 } O) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \text{Prob}(\text{Pat 选 } F) = \frac{2}{3}. \quad (11.51)$$

互补行动的概率则为 $1/3$ 。手稿结论写为：

$$\text{BNE} \longrightarrow \text{MNE}. \quad (11.52)$$

即当私人偏好扰动逐渐消失时，不完全信息博弈中的贝叶斯纳什均衡选择概率收敛到原完全信息性别之战博弈的混合策略均衡。

20 拍卖中的贝叶斯纳什均衡：第一价格密封拍卖

20.1 两人第一价格密封拍卖

手稿标题为：拍卖中的 B-NE：油田，评价 V_A, V_B 。原稿描述为：

“[原稿不清：一阶/第一价格]”密封拍卖，最高出价者得。

根据后续支付函数，赢家支付自己的出价，故该机制为**第一价格密封拍卖**。

设两个竞标者 A, B 的估值分别为：

$$V_A, V_B \in [0, 1], \quad (12.1)$$

且独立服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布。二者出价为：

$$b_A, \quad b_B. \quad (12.2)$$

竞标者 A 的收益为：

$$u_A = \begin{cases} V_A - b_A, & b_A > b_B, \\ 0, & b_A \leq b_B. \end{cases} \quad (12.3)$$

手稿忽略了平局情形；由于连续分布下平局发生概率为零，这不影响均衡求解。

20.2 线性投标策略与中标概率

手稿假定两位竞标者使用线性策略：

$$b_i = k_i V_i, \quad i = A, B. \quad (12.4)$$

给定 B 的策略 $b_B = k_B V_B$ ，竞标者 A 中标的概率为：

$$\begin{aligned} \text{Prob}(b_A > b_B) &= \text{Prob}(b_A > k_B V_B) \\ &= \text{Prob}\left(\frac{b_A}{k_B} > V_B\right) \\ &= \frac{b_A}{k_B}, \end{aligned} \quad (12.5)$$

其中最后一步利用了 $V_B \sim U[0, 1]$ ，并隐含要求 $0 \leq b_A/k_B \leq 1$ 。

因此， A 的期望利润为：

$$\pi_A = (V_A - b_A) \frac{b_A}{k_B}. \quad (12.6)$$

20.3 两人对称均衡出价

竞标者 A 对 b_A 最大化期望利润：

$$\max_{b_A} (V_A - b_A) \frac{b_A}{k_B}. \quad (12.7)$$

一阶条件为：

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial b_A} = \frac{V_A - 2b_A}{k_B} = 0. \quad (12.8)$$

因此：

$$b_A = \frac{V_A}{2}. \quad (12.9)$$

对称地：

$$b_B = \frac{V_B}{2}. \quad (12.10)$$

所以，两竞标者第一价格密封拍卖的对称贝叶斯纳什均衡投标策略为：

$$\boxed{b_i(V_i) = \frac{V_i}{2}, \quad i = A, B.} \quad (12.11)$$

手稿页末总结了第一价格拍卖中的权衡：

Trade-off: b 越高，越可能得到标的，但收益越小。

即提高出价提高了中标概率，却降低了中标后的净收益 $V_i - b_i$ 。

20.4 推广： n 位竞标者

手稿第 13 页将上述结论推广至 n 位竞标者。对竞标者 A 而言，存在 $n - 1$ 位竞争者。其期望利润为：

$$\pi_A = (V_A - b_A) \text{Prob}(b_A > b_i, \forall i = 1, \dots, n - 1). \quad (13.1)$$

设其余竞标者均采用对称线性策略：

$$b_i = kV_i, \quad i = 1, \dots, n - 1, \quad (13.2)$$

且估值相互独立并均匀分布于 $[0, 1]$ 。则：

$$\begin{aligned} \text{Prob}(b_A > b_i, \forall i) &= \text{Prob}\left(V_i < \frac{b_A}{k}, \forall i\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} \frac{b_A}{k} \\ &= \left(\frac{b_A}{k}\right)^{n-1}. \end{aligned} \quad (13.3)$$

因此：

$$\pi_A = (V_A - b_A) \left(\frac{b_A}{k}\right)^{n-1}. \quad (13.4)$$

20.5 n 人对称贝叶斯纳什均衡

忽略正的常数 $k^{-(n-1)}$ ，最大化问题等价于：

$$\max_{b_A} (V_A - b_A) b_A^{n-1}. \quad (13.5)$$

一阶条件为：

$$\begin{aligned} 0 &= -b_A^{n-1} + (n-1)(V_A - b_A)b_A^{n-2} \\ &= b_A^{n-2}[(n-1)V_A - nb_A]. \end{aligned} \quad (13.6)$$

对于正出价，得到：

$$b_A = \frac{n-1}{n}V_A. \quad (13.7)$$

因此，对任意竞标者 i ，对称贝叶斯纳什均衡策略为：

$$b_i(V_i) = \frac{n-1}{n}V_i. \quad (13.8)$$

20.6 竞标人数增加的经济含义

手稿写有：

随着竞标者增加，每个企业获得标的的机会减少，竞标的激励越大；但 $b_A < V_A$ ，不会说真值。

由均衡策略可见：

$$\frac{n-1}{n} \uparrow 1 \quad \text{as } n \uparrow \infty. \quad (13.9)$$

即竞标者人数越多，均衡出价越接近私人估值：

$$b_i(V_i) \rightarrow V_i. \quad (13.10)$$

但对于任意有限的 n ：

$$b_i(V_i) < V_i. \quad (13.11)$$

这是因为第一价格拍卖中，竞标者仍需要在“提高中标概率”和“保留中标利润”之间权衡，因此会进行压价投标（bid shading），而不会如实报出估值。

手稿末尾有两个备忘框：

[原稿不清：插入《经济学案例分析》；讨论：三次高价拍卖/三次高价竞标。]

该处属于后续补充安排，保留待总整理时处理。

21 本批笔记小结

第 11.0–13 页将静态不完全信息博弈应用于数量竞争、协调博弈与拍卖：

- (1) 在贝叶斯古诺模型中，一方仅知道对手成本类型的分布，因此按照对手的类型依赖反应函数最大化期望利润；
- (2) 在扰动后的性别之战中，私人偏好类型诱导截断策略；当扰动区间缩小到零时，贝叶斯均衡的选择概率收敛到完全信息博弈中的混合策略均衡；
- (3) 在第一价格密封拍卖中，中标者支付自己的出价，因此竞标者需要在中标概率与中标净收益之间权衡；
- (4) 两人拍卖的对称均衡出价为 $V_i/2$ ， n 人拍卖的对称均衡出价为 $\frac{n-1}{n}V_i$ ；

(5) 竞标者越多，竞争越激烈，均衡出价越接近真实估值，但在有限人数下仍低于真实估值。

第六部分 第六部分：第 15 章习题（题 1—题 7）

22 题 15.1：猎鹿博弈与多人扩展

22.1 两人猎鹿博弈

手稿给出一个猎鹿博弈（Stag Hunt）支付矩阵。参与人 A 与 B 均可选择“鹿”或“兔”：

	B : 鹿	B : 兔
A : 鹿	(2, 2)	(0, 1)
A : 兔	(1, 0)	(1, 1)

(15.1.1)

22.1.1 纯策略纳什均衡

由矩阵可见：

$$NE = \{(\text{鹿}, \text{鹿}), (\text{兔}, \text{兔})\}. \quad (15.1.2)$$

若相信对方会猎鹿，则猎鹿可以获得 2 而猎兔仅得 1；若相信对方会猎兔，则猎兔可以获得 1 而猎鹿得 0。因此这是具有协调问题的多重均衡博弈。

22.1.2 混合策略均衡

令 p 表示 A 选择“鹿”的概率， q 表示 B 选择“鹿”的概率。

使 A 在“鹿”和“兔”之间无差异，需要：

$$2q + 0(1 - q) = 1q + 1(1 - q). \quad (15.1.3)$$

因此：

$$2q = 1, \quad q = \frac{1}{2}. \quad (15.1.4)$$

对称地，使 B 在“鹿”和“兔”之间无差异，需要：

$$2p + 0(1 - p) = 1p + 1(1 - p), \quad (15.1.5)$$

从而：

$$p = \frac{1}{2}. \quad (15.1.6)$$

所以混合策略纳什均衡为：

$$\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right). \quad (15.1.7)$$

22.2 n 人猎鹿博弈

手稿第 (3) 问将猎鹿博弈推广到 n 人情形。若每位其他参与者均以概率 p 选择“鹿”，则除某参与人 i 之外的其余 $n-1$ 人都选择“鹿”的概率为：

$$p^{n-1}. \quad (15.1.8)$$

若参与人 i 选择“鹿”，只有在其他人均选择“鹿”时得到收益 2，因此期望收益为：

$$U_i(\text{鹿}) = 2p^{n-1} + 0(1 - p^{n-1}) = 2p^{n-1}. \quad (15.1.9)$$

若参与人 i 选择“兔”，手稿给定其收益恒为 1：

$$U_i(\text{兔}) = 1. \quad (15.1.10)$$

混合均衡的无差异条件为：

$$2p^{n-1} = 1. \quad (15.1.11)$$

从而：

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n-1}}. \quad (15.1.12)$$

因此：

$$p > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n-1}} \Rightarrow \text{选择鹿}; \quad (15.1.13)$$

$$p < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n-1}} \Rightarrow \text{选择兔}. \quad (15.1.14)$$

随着 n 增加，协调到“所有人都猎鹿”所要求的主观成功概率门槛越来越高，体现了多人协调的困难。

23 题 15.3: 参数化协调博弈的混合均衡

原稿给出一个两行动协调博弈。行动名称字迹较轻，疑似为两个活动选择；为避免误认，以下记为 X 与 Y 。收益矩阵为：

	$B : X$	$B : Y$
$A : X$	$(K, 1)$	$(0, 0)$
$A : Y$	$(0, 0)$	$(1, K)$

(15.3.1)

其中 $K > 0$ ；原稿旁边用 $p, 1-p$ 和 $q, 1-q$ 标记两人的混合概率。

令 A 以概率 p 选择 X ，令 B 以概率 q 选择 X 。

为了使 B 在 X 与 Y 之间无差异，有：

$$p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p \cdot 0 + (1-p) \cdot K. \quad (15.3.2)$$

所以：

$$p = K(1-p), \quad p = \frac{K}{1+K}, \quad 1-p = \frac{1}{1+K}. \quad (15.3.3)$$

为了使 A 在 X 与 Y 之间无差异, 有:

$$Kq + (1 - q) \cdot 0 = 0 \cdot q + 1 \cdot (1 - q). \quad (15.3.4)$$

所以:

$$Kq = 1 - q, \quad q = \frac{1}{1 + K}, \quad 1 - q = \frac{K}{1 + K}. \quad (15.3.5)$$

因此混合策略均衡为:

$$\sigma_A^* = \left(\frac{K}{1 + K}, \frac{1}{1 + K} \right), \quad \sigma_B^* = \left(\frac{1}{1 + K}, \frac{K}{1 + K} \right). \quad (15.3.6)$$

24 题 15.4: 风险分担与帕累托有效条件

说明: 原稿未清晰写出完整题干, 本节按可识别的拉格朗日推导忠实整理。变量 r, L, Y_A, Y_B 的具体经济定义需结合课本题干复核。

手稿采用拉格朗日方法, 写出某一帕累托有效问题的目标:

$$\max_L U_B + \lambda U_A. \quad (15.4.1)$$

其中 λ 为帕累托权重。关于转移或分配变量 L 的一阶条件为:

$$-U'_B + \lambda U'_A = 0. \quad (15.4.2)$$

手稿进一步考虑参与人 A 对状态变量 r 的最优选择:

$$\max_r U_A(Y_A + L). \quad (15.4.3)$$

其一阶条件写为:

$$U'_A \left(Y'_A + \frac{dL}{dr} \right) = 0. \quad (15.4.4)$$

由于原稿注明

$$U'_A \neq 0,$$

所以:

$$Y'_A + \frac{dL}{dr} = 0. \quad (15.4.5)$$

对式 (15.4.2) 关于 r 求导, 手稿写得:

$$-U''_B \left(Y'_B - \frac{dL}{dr} \right) + \lambda U''_A \left(Y'_A + \frac{dL}{dr} \right) = 0. \quad (15.4.6)$$

由式 (15.4.5) 代入式 (15.4.6), 得到:

$$-U''_B \left(Y'_B - \frac{dL}{dr} \right) = 0. \quad (15.4.7)$$

在 $U''_B \neq 0$ 下:

$$Y'_B = \frac{dL}{dr}. \quad (15.4.8)$$

将式 (15.4.8) 与式 (15.4.5) 合并, 得到:

$$Y'_A + Y'_B = 0. \quad (15.4.9)$$

手稿页末结论可辨认为: 该条件描述了有效风险分担或有效资源分配下, 两方边际变动互相抵消的条件。

25 题 15.6 与题 15.8: 顺序行动与先动优势

25.1 题 15.6: 原稿可辨识结论

题 15.6 的题干及第 (1) 问字迹不足以可靠辨认。可确定的信息如下:

(1) 原稿出现阈值或报价形式:

$$A \geq 500 + \varepsilon, \quad B = 500, \quad (15.6.1)$$

其经济语境为 [原稿不清: 电子竞价/报价/进入竞标问题];

(2) 手稿写明:

$$\text{有 NE, 不唯一.} \quad (15.6.2)$$

并列举例如:

$$(A, B) = (500.01, 500), \quad (A, B) = (500.001, 500), \quad (15.6.3)$$

均可为 NE;

(3) 手稿第 (3) 问写有: 在信息不完全下, 该博弈是一个贝叶斯博弈, 并提示结合题 15.8 或后续不完全信息分析求解。

此题完整转录仍需题干或更清晰原图核对, 故不对博弈机制作进一步猜测。

25.2 题 15.8: 静态博弈的纳什均衡

手稿给出如下支付矩阵。行动文字可辨认为“生”与“不生”, 可能意指“生产/不生产”, 本稿按原记号保留:

	B : 生	B : 不生	
A : 生	(3, 3)	(5, 4)	(15.8.1)
A : 不生	(4, 5)	(2, 2)	

两组纯策略纳什均衡为:

$$\text{NE} = \{(\text{生}, \text{不生}), (\text{不生}, \text{生})\}. \quad (15.8.2)$$

25.3 若 A 先行动: 向后归纳

若 A 先行动, B 在观察 A 的行动后作选择:

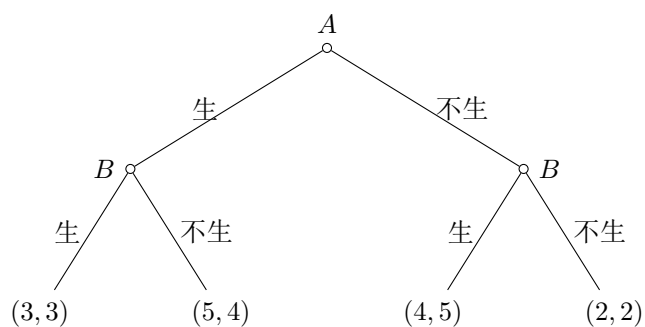
- 若 A 选择“生”, 则 B 比较 3 与 4, 选择“不生”;
- 若 A 选择“不生”, 则 B 比较 5 与 2, 选择“生”。

因此 A 比较自己可得到的收益:

$$\text{若选“生”得到5,} \quad \text{若选“不生”得到4.} \quad (15.8.3)$$

故 A 选择“生”, B 随后选择“不生”, 最终结果为:

$$(\text{生}, \text{不生}), \quad \text{支付}(5, 4). \quad (15.8.4)$$

图 4: 题 15.8: A 先行动时的顺序博弈树。

25.4 若 B 先行动: 向后归纳

若 B 先行动, 对称地:

- 若 B 选择“生”, A 选择“不生”, 结果为 $(4, 5)$;
- 若 B 选择“不生”, A 选择“生”, 结果为 $(5, 4)$;
- 因为 B 比较 5 与 4, 故选择“生”。

最终结果为:

$$(\text{不生}, \text{生}), \quad \text{支付}(4, 5). \quad (15.8.5)$$

手稿总结:

先动者得到 5, 后动者得到 4; 厂商 A 、 B 都有先动优势。

26 题 15.10: 垄断定价与另一状态下的利润计算

说明：本页中题目情境标题和第二组数量的状态名称较难辨认；以下忠实保留能够识别的需求、成本、利润推导，并将状态记作“状态 1”“状态 2”。

26.1 状态 1 的垄断最优选择

手稿给出的需求为：

$$Q = 7000 - 100P. \quad (15.10.1)$$

因此反需求函数为：

$$P = 70 - 0.01Q. \quad (15.10.2)$$

边际收益为：

$$MR = 70 - 0.02Q. \quad (15.10.3)$$

给定边际成本：

$$MC = 10, \quad (15.10.4)$$

垄断最优满足：

$$70 - 0.02Q = 10. \quad (15.10.5)$$

从而：

$$Q_1^{\pi} = 3000, \quad P_1^{\pi} = 70 - 0.01 \times 3000 = 40. \quad (15.10.6)$$

利润为：

$$\pi_1^{\pi} = (40 - 10) \times 3000 = 90000. \quad (15.10.7)$$

26.2 状态 2 的手稿结果

手稿下方另列一组结果：

$$Q_2 = 1000, \quad P_2 = 20. \quad (15.10.8)$$

相应利润应为：

$$\pi_2 = (20 - 10) \times 1000 = 10000. \quad (15.10.9)$$

原图中该利润末尾字迹形似“40000”，但其下方期望利润计算为 50000，且按乘法本身应为 10000，故本稿按计算关系订正为 10000，并保留此校勘说明。

若两种状态等概率出现，则期望利润为：

$$\mathbb{E}\pi = 0.5 \times 90000 + 0.5 \times 10000 = 50000. \quad (15.10.10)$$

本页状态 2 的需求来源、是否对应[原稿不清：差别定价/低需求状态/另一市场]，需结合题目原文核验。

27 题 15.11: 需求状态不确定下的贝叶斯古诺竞争

27.1 厂商 B 知道状态, 厂商 A 仅知道分布

手稿标题旁注可辨识为: 以需求参数具有两种可能状态为背景, 厂商 B 得知实际状态, 而厂商 A 仅知道状态分布。手稿使用等概率:

$$\text{Prob}(H) = \text{Prob}(L) = \frac{1}{2}. \quad (15.11.1)$$

在高状态与低状态下, 厂商 B 的利润分别为:

$$\pi_{BH} = (110 - q_A - q_{BH})q_{BH}, \quad (15.11.2)$$

$$\pi_{BL} = (70 - q_A - q_{BL})q_{BL}. \quad (15.11.3)$$

27.2 厂商 B 的状态依赖反应函数

分别最大化式 (15.11.2)–(15.11.3), 得到:

$$q_{BH}^* = \frac{110 - q_A}{2}, \quad (15.11.4)$$

$$q_{BL}^* = \frac{70 - q_A}{2}. \quad (15.11.5)$$

27.3 厂商 A 的期望利润

手稿给出的厂商 A 的净反需求基准为:

$$[P_A - MC_A] = 90 - q_A - q_B. \quad (15.11.6)$$

因此其期望利润为:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\pi_A &= 0.5(90 - q_A - q_{BH})q_A + 0.5(90 - q_A - q_{BL})q_A \\ &= (90 - q_A - 0.5q_{BH} - 0.5q_{BL})q_A. \end{aligned} \quad (15.11.7)$$

厂商 A 的一阶条件给出:

$$q_A^* = \frac{90 - 0.5q_{BH} - 0.5q_{BL}}{2}. \quad (15.11.8)$$

联立式 (15.11.4)、式 (15.11.5) 与式 (15.11.8), 手稿得到贝叶斯–古诺均衡数量:

$$\boxed{q_A^* = 30, \quad q_{BH}^* = 40, \quad q_{BL}^* = 20.} \quad (15.11.9)$$

其中, B 在高需求状态下生产较多, 在低需求状态下生产较少; 而 A 因仅观察到先验分布, 选择单一的最优产量 30。

28 题 15.12: 第一价格拍卖、第二价格拍卖与收益等价

28.1 第一价格拍卖的预期收入

手稿页首引用前述第一价格密封拍卖的对称均衡投标函数:

$$b_i = \left(\frac{n-1}{n} \right) V_i. \quad (15.12.1)$$

设 $V^{(1)}$ 为 n 位投标者中最高估值, 且每位投标者估值独立同分布于 $U[0, 1]$ 。对于任意 $v \in [0, 1]$:

$$\text{Prob}(V^{(1)} \leq v) = v^n. \quad (15.12.2)$$

故最高估值的密度函数为:

$$f_{V^{(1)}}(v) = nv^{n-1}. \quad (15.12.3)$$

最高估值的期望值为:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V^{(1)}] &= \int_0^1 v nv^{n-1} dv \\ &= \frac{n}{n+1}. \end{aligned} \quad (15.12.4)$$

在第一价格拍卖中, 赢家按照均衡投标函数支付:

$$b(V^{(1)}) = \frac{n-1}{n} V^{(1)}. \quad (15.12.5)$$

因此卖方期望收入为:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[R^{FP}] &= \frac{n-1}{n} \mathbb{E}[V^{(1)}] \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{n-1}{n+1}. \end{aligned} \quad (15.12.6)$$

28.2 第二价格拍卖中的如实报价

手稿第 (2) 问讨论第二价格拍卖, 并在边注写有:

truth-telling mechanism.

设竞标者 i 的真实估值为 V_i , 其报出的价格为 b_i ; 令 b_j 表示其他投标者中的最高报价。第二价格拍卖中, 竞标者 i 若中标, 只支付 b_j 。

要证明 $b_i = V_i$ 是弱占优策略, 只需比较任意偏离报价 b'_i 与真实报价在三类相对位置下的收益。

28.2.1 高报: $b'_i > V_i$

(1) 若

$$b'_i > b_j > V_i,$$

则如实报价时竞标者 i 输掉拍卖, 收益为 0; 高报价会中标, 但收益为

$$V_i - b_j < 0,$$

因而严格更差。

(2) 若

$$b'_i > V_i > b_j,$$

则高报价与如实报价都会中标, 并且都支付 b_j , 收益相同。

(3) 若

$$V_i > b'_i > b_j,$$

则高报价与如实报价同样都会中标, 收益相同。

因此, 将报价提高到真实估值以上不可能增加收益, 并可能造成损失。

28.2.2 低报: $b'_i < V_i$

(1) 若

$$b_j > V_i > b'_i,$$

则无论如实报价还是低报价均不能中标, 收益相同, 均为 0。

(2) 若

$$V_i > b_j > b'_i,$$

则如实报价可以中标并获得正收益

$$V_i - b_j > 0,$$

而低报价会输掉拍卖, 收益为 0, 因而严格更差。

(3) 若

$$V_i > b'_i > b_j,$$

则低报价与如实报价均中标, 且都支付 b_j , 收益相同。

所以:

$$\boxed{b_i = V_i \text{ 是第二价格拍卖中的弱占优策略。}} \quad (15.12.7)$$

28.3 第二价格拍卖的预期收入

在第二价格拍卖中, 所有投标者如实报价, 因此卖方收入等于第二高估值。记 $V^{(2)}$ 为 n 人估值中的第二高值。

当估值独立均匀分布于 $[0, 1]$ 时, 第二高估值的密度为:

$$f_{V^{(2)}}(v) = n(n-1)(1-v)v^{n-2}, \quad 0 \leq v \leq 1. \quad (15.12.8)$$

其期望值为:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V^{(2)}] &= \int_0^1 v n(n-1)(1-v)v^{n-2} dv \\ &= n(n-1) \int_0^1 (v^{n-1} - v^n) dv \\ &= n(n-1) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{n-1}{n+1}. \end{aligned} \quad (15.12.9)$$

故第二价格拍卖下卖方的期望收入为：

$$\mathbb{E}[R^{SP}] = \frac{n-1}{n+1}. \quad (15.12.10)$$

与第一价格拍卖的期望收入比较：

$$\boxed{\mathbb{E}[R^{FP}] = \mathbb{E}[R^{SP}] = \frac{n-1}{n+1}.} \quad (15.12.11)$$

手稿页末结论为：

两者差异不在收益，而在于竞价参与者的策略与定价机制不同；该结论属于“收益等价”思想。

29 本批习题小结

本批习题页围绕三个主题展开：

- (1) **协调与先动优势**：猎鹿博弈说明协调风险与多重均衡；题 15.8 说明顺序行动能够选择静态博弈的均衡，并使先动者获益。
- (2) **不完全信息竞争**：题 15.10–15.11 使用不同状态或未知需求参数分析企业在不确定环境中的利润与贝叶斯古诺产量选择。
- (3) **拍卖机制**：第一价格拍卖中竞标者压价报价；第二价格拍卖中如实报价为弱占优策略；在独立均匀估值假设下，两类拍卖带来相同的期望收入。